# Cvičení 10. 3. 2021

Téma: Procvičování lineární algebry, pokračování

Mějme matice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bez faktoru $\frac{1}{2}$ se jedná o tzv. Pauliho matice $\sigma_x$, $\sigma_y$ a $\sigma_z$, které jsou užitečné pro popis spinu.

Už víme, že matice $A$, $B$, $C$ mají vlastní čísla $\pm\frac{1}{2}$ a vlastní vektory $|a_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$, $|a_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$, $|b_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-i}{1}$, $|b_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1}$ a $|c_+\rangle = \binom{1}{0}$, $|c_-\rangle = \binom{0}{1}$.

Abychom mohli s maticemi pracovat, máme je vyjádřené v nějaké bázi. Používáme bázi vlastních stavů matice $C$, proto jsou také tyto stavy $|c_+\rangle = \binom{1}{0}$ a $|c_-\rangle = \binom{0}{1}$. Ale často chceme pracovat v jiné bázi, například v bázi vlastních vektorů matice $A$. Potom musíme provést transformaci báze pomocí matice transformace $U$, do které seřadíme vlastní vektory nové báze. Transformace matice je pak $O' = U^+OU$. Proveďte transformaci $A$ do báze jejích vlastních vektorů. Získaná matice by měla být diagonální. Jaká vypadá matice $C$ v bázi stavů $|a_+\rangle$ a $|a_-\rangle$? Transformujte také stav $|c_-\rangle$ a ověřte, že je vlastním stavem transformované matice $C$. (Pomocí transformace vektoru $\mathrm{c}' = \mathrm{Uc}$.) Pro rychlíky: Jak vypadá matice $B$ v téže bázi? (Řešení na I-5 a II-5.)

Při úpravě výrazů v kvantové mechanice často používáme rozklad identity do báze $1 = \sum_i |i\rangle\langle i|$. Ověřte, že tento výraz platí pro stavy $|a_i\rangle$ a $|b_i\rangle$ vyjádřené jako vektory v bázi $|c_i\rangle$. (Řešení na I-5 a II-4.)

Pro matice a operátory platí také zajímavá relace $O = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$, kde $O$ je operátor (matice), suma je přes vlastní stavy, $\lambda_i$ jsou vlastní hodnoty a $|i\rangle$ odpovídající vlastní vektory. Pomocí tohoto vztahu vypočtěte matice $A$ a $C$. (Řešení na I-4.)

Vraťme se ještě ke středním hodnotám operátorů, uvažujme $\langle c_+|\hat{A}|c_+\rangle$. Výraz upravte vložením $1 = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|$ zleva a zprava okolo operátoru $\hat{A}$. Dvojnásobnou sumaci můžeme přepsat jako násobení matice a vektorů. Výraz $\langle a_i|\hat{A}|a_j\rangle$ je matice operátoru $A$ v bázi stavů $|a_i\rangle$. Výrazy nalevo a napravo jsou vektory reprezentující stav $|c_+\rangle$ v bázi $|a_i\rangle$. Vyčíslete matici a vektory a vypočtěte. (Řešení na II-4.)

Ještě jednou se podívejme na střední hodnotu a uvažujme opět $\langle c_+|\hat{A}|c_+\rangle$. Výraz upravte použitím $A = \sum_i a_i|a_i\rangle\langle a_i|$, kde $a_i$ je vlastní hodnota a $|a_i\rangle$ odpovídající vlastní stav, tedy buď $|a_+\rangle$ nebo $|a_-\rangle$. Sumaci rozepište a upravte na výrazy obsahující kvadráty $\langle c_+|a_+\rangle$ a $\langle c_+|a_-\rangle$. Jak lze daný výraz chápat? Vyčíslete a ověřte shodu s předchozím. (Řešení na II-5.)

Nyní uvažujme situaci ve které máme operátor působící na obecný stav. Uvažujme například operátor $B$ a stav $|c_+\rangle$, který není jeho vlastním stavem. Vyjádřete stav $|c_+\rangle$ v bázi stavů $|b_i\rangle$. Na daný výraz aplikujte operátor $B$ přímo (s využitím znalosti vlastních hodnot) a vyjádřete jako vektor. Porovnejte s přímou aplikací matice $B$ na vektor $|c_+\rangle$. (Řešení na II-3.)

V mnoha případech aplikujeme na stav ne jeden, ale více operátorů. Při této činnosti se někdy užijí tzv. komutátory: $\hat{K} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, značené $[\hat{A}, \hat{B}]$. Pokud je komutátor nula, operátory komutují, jinak nekomutují. Ověřte, zda komutují matice $\sigma_x$ a $\sigma_y$ pomocí výpočtu výrazů $\sigma_x\sigma_y|c_+\rangle$ a $\sigma_y\sigma_x|c_+\rangle$. Pro výpočet komutátoru není vlastně ani třeba uvažovat konkrétní stav, vypočtěte tedy výraz $[\sigma_x, \sigma_y]$ přímo. Pro rychlíky: vypočtěte komutátor matic $\sigma_y$ a $\sigma_z$. (Řešení na II-1.)

Matice $A$, $B$ a $C$ odpovídají měření spinu podél os $x$, $y$ a $z$. Matici měření podél libovolné osy $\vec{n}$ získáme jako

$$S_n = \vec{n} \cdot (A, B, C)\,,$$

kde $(A, B, C)$ je vpodstatě tenzor řádu tři. Výsledkem je tedy matice $2{\times}2$. Pro $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ vypočtěte matici $S_n$ a ověřte, že vlastní vektor získaný obdobným způsobem jako matice $S_n$ je jejím vlastním stavem.