Cvičení 20. 4. 2022

Téma: Moment hybnosti

Moment hybnosti je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, tedy složkově $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$.

Vlastní stavy L^2 a L_z explicitně

Vlastní stavy L^2 a L_z jsou sférické harmoniky $Y_l^m(\theta, \phi)$. Ty tvoří ortonormální bázi v úhlových souřadnicích, tedy platí

$$\langle Y_{l'}^{m'} | Y_l^m \rangle = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \,,$$

kde l a m jsou kvantová čísla velikosti momentu hybnosti a jeho průmětu na osu z. Kvantová čísla mohou nabývat hodnot $l = 0, 1, 2, \ldots$ a $m = -l, \ldots, l$, vlastní hodnoty velikosti L^2 jsou $\hbar^2 l(l+1)$ a průmětu $\hbar m$.

Vlastní stavy jsou sférické harmoniky Y_l^m, pro $l = 0$ a $l = 1$ to jsou tyto funkce

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_1^{\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} \,. \end{aligned}$$

navíc $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos\theta \sin\theta e^{i\phi}$.

Pozn.: Povšimněme si, že pro $l = 1$ vystupuje $\sin\theta$ nebo $\cos\theta$ v první mocnině, pro $l = 2$ jsou geometrické funkce dohromady v mocnině druhé. To je obecné a je lepší si to zapamatovat. Dále vlastní hodnotu L_z můžeme vidět z exponentu exponenciely, která má tvar $e^{im\phi}$.

▷ Ověřte normalizaci funkcí s $l = 0$ a $l = 1$.

▷ Ověřte, že funkce Y_0^0 a Y_1^0 jsou na sebe kolmé.

▷ *Pro rychlíky:* Ověřte kolmost funkcí Y_1^1 a Y_2^1.

▷ *Pro rychlíky:* Ověřte normalizaci funkce Y_2^1.

Maticová reprezentace momentu hybnosti

Operátory momentu hybnosti vyjádříme v bázi vlastních stavů L^2 a L_z.

▷ Jaký tvar budou mít matice L^2 a L_z?

Vlastní vektory jsou indexovány kvantovými čísly velikosti momentu hybnosti l a jeho průmětu m. Vlastní vektory sdružíme do skupin se stejným kvantovým číslem velikosti momentu hybnosti l.

▷ Kolik vlastních vektorů přísluší ke stejnému l?

Nyní už máme představu o tvaru matic a zapíšeme si je. Přitom využijeme

$$L^2 |lm\rangle = \hbar^2 l(l+1) |lm\rangle \quad \text{a} \quad L_z |lm\rangle = m\hbar |lm\rangle \,.$$

Důležitými operátory pro moment hybnosti jsou zvyšovací a snižovací operátory, $L_\pm$, pro které platí

$$L_\pm |lm\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |lm \pm 1\rangle$$

.

▷ Matice $L_\pm$ budou opět blokově diagonální ve skupinách se stejným l. Kolik bude v každém bloku nenulových členů?

▷ Vytvořte matici L_+ pro $l = 0$, $l = 1$ a $l = 2$. Vytvořte matici L_- pro $l = 1$.

▷ *Pro rychlíky:* Uvažujme stav s maximální možnou projekcí pro dané l. Jakou hodnotu bude mít koeficient $l(l+1) - m(m+1)$ při použití L_+ na tento stav? Obdobně, jakou hodnotu bude mít $l(l+1) - m(m-1)$ při použití L_- na stav s nejnižším možným m pro dané l?

▷ Použijte $L_\pm = L_x \pm iL_y$ pro vytvoření matic L_x a L_y.

▷ Ověřte, že matice $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ pro $l = 1$ je shodná s maticí L^2.

▷ *Pro rychlíky:* Uvažujme operátor $\sin\theta$, bude jeho matice také blokově diagonální?

Komutační relace

Pro složky momentu hybnosti platí $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar L_k$.

▷ Ověřte pro $L_i = L_x$, $L_j = L_y$ a $L_k = L_z$ pomocí maticové reprezentace pro $l = 1$.

Vlastní a střední hodnoty L^2 a L_z v různých reprezentacích

Budeme uvažovat stavy Y_0^0 a Y_1^0.

▷ Jaké jsou vlastní hodnoty operátorů L^2 a L_z pro dané stavy?

Oba stavy zkombinujeme do funkce $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_0^0 + Y_1^0)$.

▷ Je ψ vlastní funkce L^2 nebo L_z?

▷ Vypočtěte střední hodnotu L^2 a L_z pro ψ.

Nyní budeme výpočet opakovat ve sférických souřadnicích kde

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{a} \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta\,.$$

Dále

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) \quad \text{a} \quad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\,.$$

Tedy:

▷ Jaký je výsledek akce L_z na oba stavy?

▷ Jaká je střední hodnota L_z a L^2 pro ϕ?

Nakonec výpočet provedeme v maticové reprezentaci L_z a L^2. Bude nám stačit vytvořit matice v bázi stavů Y_0^0 a Y_1^0, případně můžeme vytvořit matice v bázi všech stavů s $l = 0$ nebo $l = 1$.

▷ Vytvořte matice L_z a L^2 ve zvolené bázi.

▷ Napište stav ψ jako vektor ve zvolené bázi a vypočtěte střední hodnotu.