Cvičení 6. 4. 2022

Téma: Gausovka, zvyšovací a snižovací operátory, střední hodnoty

Na přednášce jste měli probírat kvantový oscilátor, systém s potenciálem $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Je to důležitý systém, tak se na něj opět budeme připravovat.

V minulém cvičení jsme si ukázali zvyšovací a snižovací operátory a ukázaly jejich vztah k operátorům x a p.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right).$$

Operátory a a $a^\dagger$ působí na vlastní stavy takto:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,.$$

∞ Maticová reprezentace

Působení operátorů a a $a^\dagger$ je dobře vidět v maticové reprezentaci, kde se ukáže i pár jiných zajímavých věcí pro jiné operátory.

Pro připomenutí, maticovou reprezentaci operátoru $\hat{O}$ vytvoříme z čísel o_{mn} vypočtených takto $o_{mn} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$. Čísla o_{mn} pak uspořádáme do matice $\mathbf{O}$.

$\triangleright$ Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů a a $a^\dagger$ obecně a část pro $n \leq 3$ napište explicitně jako matici. Jsou hermitovské?

S maticemi můžeme ověřit některé z předešlých výpočtů.

$\triangleright$ Ověřte komutační relaci $[a, a^\dagger] = 1$.

$\triangleright$ Vypočtěte matici operátorů x a p a jejích druhých mocnin.

$\triangleright$ Sestrojte matici Hamiltoniánu.

∞ Oscilátor v elektrickém poli

Uvažujme, že částice pohybující se v poli kvantového oscilátoru nese náboj a na oscilátor působí elektrické pole o konstantní intenzitě E. Výsledkem je dodatečný potenciál $-|e|xE$.

$\triangleright$ Vypočtěte změnu energetických hladin po přidání potenciálu pomocí převedení potenciálu v Hamiltoniánu na úplný čtverec. Diskutujte roli různých parametrů ve výsledku.

$\triangleright$ Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí maticové reprezentace diagonalizací části nového Hamiltoniánu.

$\triangleright$ Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí optimalizace parametru x_0 vlnové funkce

$$f_0(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha^2}}\,.$$

$\triangleright$ Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí optimalizace (reálného) parametru C vlnové funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}}\frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}}\left(1 + \sqrt{2}C\frac{x}{\alpha}\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,.$$

∞ Gausovky

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\
f_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}}\frac{x}{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\
f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha\sqrt{\pi}}}\left(2\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bx^2} dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{B}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Bx^2} dx = \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-Bx^2} dx = \tfrac{3}{4B^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{B}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-Bx^2} dx = \frac{15}{8B^3}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$

∞ Práce s a a $a^\dagger$

Kreační a anihilační operátory pro harmonický oscilátor jsou užitečné a hodně se využívají. Typicky v případech, kdy je problém možné převést na oscilátor, případně soustavu oscilátorů. Obdobné operátory se také využívají pro popis mnohoelektronových systémů.

$\triangleright$ Vypočtěte komutátor $[x, p]$.

$\triangleright$ Vypočtěte komutační relaci pro operátory a a $a^\dagger$ s využitím $[x, p] = i\hbar$.

$\triangleright$ Vyjádřete operátory x a p pomocí operátorů a a $a^\dagger$.

$\triangleright$ Vyjádřete operátor x^2 pomocí a a $a^\dagger$. Výsledek převeďte do normálního pořadí (anihilační vpravo).

V normálním pořadí je výraz složený z $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ ve tvaru, kdy anihilační operátory jsou v každém členu vpravo. Tedy například ${a^\dagger}^2 a^3$. Toho docílíme použitím komutační relace na členy obsahující anihilační operátor nalevo od kreačního. Proč je to užitečné? Často potřebujeme vypočítat střední hodnotu operátoru vyjádřeného pomocí $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ pro základní stav. Tedy v normálním pořadí $\langle 0|{a^\dagger}^m a^n|0\rangle$. Jelikož $a|0\rangle = 0$, všechny členy s a vpravo ihned vypadnou a zbydou jen členy s $m = 0$ a $n = 0$, tedy čísla.

Pro rychlíky: $\triangleright$ Vyjádřete operátor počtu excitací $a^\dagger a$ v x-reprezentaci, z výsledku vytkněte $\hbar\omega$, identifikujte Hamiltonián a odvoďte výraz pro Hamiltonián, který obsahuje $a^\dagger a$.

∞ Střední hodnoty

V minulém cvičení jsme počítali střední hodnoty operátorů x a x^2 přímo v x-reprezentaci. Zvyšovací a snižovací operátory nám umožňují tyto hodnoty také vypočítat a navíc bez použití explicitní integrace.

$\triangleright$ Vypočtěte střední hodnotu operátoru x pomocí a a $a^\dagger$ a znalosti jejich akce na stavy kvantového oscilátoru.

$\triangleright$ Vypočtěte střední hodnoty operátorů p a x^2.

$\triangleright$ Vypočtěte akci operátoru p^2 na stav $|n\rangle$. Tedy na stav $|n\rangle$ operátorem p^2 zapůsobte. Výsledek obložte zleva stavem $\langle n|$ a dopočtěte střední hodnotu. (Někdy je takovýto postup užitečný, je dobré jej znát.)

$\triangleright$ Ověřte platnost komutačních relací.