

Cvičení 7. 3. 2023

∞ Repete I.

V minulém cvičení jsme odvodili matice operátorů $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{i\phi}$ v bázi funkcí $f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{in\phi}$, $n \in Z$, $\phi \in (0, 2\pi)$. Ukázali jsme si, že s nimi můžeme pracovat podobně jako s operátory, například můžeme vypočítat jejich komutátor (jako matici).

Příklad 1

Uvažujme nyní funkci $f_{s1}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\phi)$.

1.1 Napište vektor \mathbf{s}_1 rozvoje funkce $f_{s1}(\phi)$ do báze funkcí $f_n(\phi)$. Opět stačí uvažovat $|n| \leq 2$.

1.2 Vypočtete $\mathbf{A}\mathbf{s}_1$, je \mathbf{s}_1 vlastním vektorem \mathbf{A} ? Proč?

1.3 Vypočtete $\mathbf{A}^2\mathbf{s}_1$, je \mathbf{s}_1 vlastním vektorem \mathbf{A}^2 ? Proč?

Příklad 2

Podíváme se trochu více na výpočet středních hodnot, jelikož ty v kvantové mechanice počítáme často. Střední hodnotu operátoru \hat{O} obecně značíme $\langle \hat{O} \rangle$. Znaky \langle a \rangle naznačují, že vlevo a vpravo jsou bra a ket nějakého stavu (funkce), pro který se střední hodnota počítá, ale tento zápis konkrétní stav neudává. Pokud chceme být konkrétní, použijeme zápis $\langle \chi | \hat{O} | \chi \rangle$, kde $|\chi\rangle$ je nějaký konkrétní stav (funkce, vektor a pod.).

2.1 Vypočtete střední hodnoty operátoru \hat{A} pro stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$ pomocí integrace a znalosti působení operátoru na stavy.

R2.1 Vypočtete střední hodnoty operátoru \hat{B} pro stavy $|0\rangle$ a $|1\rangle$ pomocí integrace a znalosti působení operátoru na stavy.

Uvažujme nyní částici ve stavu s funkcí $f_{s1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\phi)$.

2.2 Vypočtete střední hodnotu operátoru \hat{A} pro funkci f_{s1} pomocí integrace a pomocí vyjádření stavu $|s1\rangle$ stavy $|n\rangle$. Výsledek okomentujte.

R2.2 Vyjádřete střední hodnotu operátoru \hat{A} pro funkci f_{s1} v maticové reprezentaci.

Příklad 3

Nyní budeme uvažovat částici ve stavu $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

3.1 Je stav $|a\rangle$ normalizovaný na 1? Proč?

3.2 Vypočtete střední hodnotu operátoru \hat{A} pro stav $|a\rangle$ pomocí integrace přes ϕ , pomocí vyjádření stavu $|a\rangle$ stavy $|n\rangle$ a pomocí maticové reprezentace.

3.3 Vypočtete střední hodnotu operátoru \hat{B} pro stav $|a\rangle$ pomocí integrace přes ϕ , pomocí vyjádření stavu $|a\rangle$ stavy $|n\rangle$ a pomocí maticové reprezentace.

∞ Čas

Z časové Sch. rovnice platí pro časový vývoj obecné funkce ψ tato rovnice

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n \nu_n(x) e^{-iE_n t/\hbar},$$

kde ν_n jsou vlastní stavy Hamiltoniánu, E_n jejich energie a c_n jsou koeficienty rozvoje do vlastních stavů určené z počátečních podmínek.

Příklad 4

4.1 Napište stav $|a\rangle$ jako funkci ϕ a času. Energii stavů $|0\rangle$ a $|1\rangle$ uvažujte 0 a E_1 .

4.2 Vypočtete časově závislou hustotu pravděpodobnosti výskytu částice, pokud je v čase $t = 0$ ve stavu $|a\rangle$.

Příklad 5

V některých výpočetních metodách se místo vývoje v reálném čase využívá vývoje v imaginárním čase. Například v kvantovém Monte Carlu.

5.1 V rovnici pro časovou závislost dosadte za $t \rightarrow -i\tau$. Jaký bude tvar ψ pro $\tau \rightarrow \infty$?
Pro rychlíky

R.1 Vypočtěte matice \mathbf{A} a \mathbf{B} v bázi funkcí $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oplus s_n(\phi) \oplus c_n(\phi)$ ze znalosti působení \hat{A} a \hat{B} na stavy této báze. $c_n(\phi)$ je $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n\phi)$.

R.2 Uvažujme matice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matici \mathbf{A} diagonalizujte a najděte její vlastní stavy. Provedte transformaci matice \mathbf{C} do báze vlastních stavů matice \mathbf{A} .

∞ **Opakování**

Pro připomenutí si vypočteme ještě jeden příklad na úpravu výrazu pomocí komutátoru. Víme, že $\frac{\hat{d}}{d\phi} e^{i\phi} = e^{i\phi} (i + \frac{\hat{d}}{d\phi})$.

5.1 Vypočtěte akci operátoru $\frac{\hat{d}}{d\phi} e^{2i\phi}$ pomocí testovací funkce a pomocí znalosti komutátoru. Ověřte shodu obou výrazů.