

Cvičení 21. 2. 2023

Funkce, operátory a lineární algebra, 2. díl

∞ Opakování a dokončení

V minulém cvičení jsme si ukázali, že operátory \hat{x} a $\frac{\hat{d}}{dx}$ nemůžeme libovolně prohazovat. Tedy operátor $\hat{x}\frac{\hat{d}}{dx}$ nepůsobí stejně jako $\frac{\hat{d}}{dx}\hat{x}$, ale platí $\hat{x}\frac{\hat{d}}{dx} = \frac{\hat{d}}{dx}\hat{x} - 1$. Tento vztah lze odvodit pomocí komutátoru $[\hat{x}, \frac{\hat{d}}{dx}] = -1$, který můžeme zase odvodit pomocí působení na testovací funkci. Jakmile máme komutátor vypočtený pomocí obecné testovací funkce, můžeme použít vztah $\hat{x}\frac{\hat{d}}{dx} = \frac{\hat{d}}{dx}\hat{x} - 1$ k upravování výrazů bez explicitního užití testovací funkce. V první řadě nám umožňuje přesunout problémové derivace více doprava, blíže k testovací funkci, zde využijeme tvaru $\frac{\hat{d}}{dx}\hat{x} = \hat{x}\frac{\hat{d}}{dx} + 1$.

Příklad 1

1.1a Zjednodušte $(\hat{x} + \frac{\hat{d}}{dx})^2$ pomocí akce na testovací funkci.

1.1b Použijte $\frac{\hat{d}}{dx}\hat{x} = \hat{x}\frac{\hat{d}}{dx} + 1$ ke zjednodušení operátoru $(\hat{x} + \frac{\hat{d}}{dx})^2$ bez pomoci testovací funkce.

Výsledky by se měly shodovat.

1.2 Zjednodušte operátor $\frac{\hat{d}}{dx}\hat{x}^2$ oběma způsoby.

Pro rychlíky: ▷ Zjednodušte operátor $\frac{\hat{d}^2}{dx^2}\hat{x}^2$ oběma způsoby.

∞ Funkce $e^{in\phi}$

Nyní využijeme funkce $f_n(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\phi}$, kde $n \in Z$ a $\phi \in (0, 2\pi)$, z domácího úkolu. Ukážeme si, že funkce tvoří ortonormální bázi (ON). (Co musí pro ON bázi platit?)

Příklad 2

2.1 Ověřte, že $f_n(\phi)$ tvoří ON bázi.

V kvantové mechanice často používáme tzv. bra-ketovou notaci, kterou si nyní zavedeme pro funkce $f_n(\phi)$. Ket je nějaký normalizovaný stav, například tedy nějaká funkce ON báze. ! Ale ket není vyjádřený v nějakých souřadnicích (to je důležitější pro budoucnost). Pokud má částice vlnovou funkci $f_n(\phi)$, tak budeme říkat, že je ve stavu $|n\rangle$. Při výpočtu skalárního součinu používáme také komplexně sdružené funkce $f_n^*(\phi)$, ty potom odpovídají bra $\langle n|$.

Pro naše funkce $f_n(\phi)$ máme definovaný skalární součin jako

$$\int_0^{2\pi} f_m^*(\phi) f_n(\phi) d\phi.$$

Ten můžeme zapsat jako $\langle m|n\rangle$, bra přilepený na ket automaticky znamená skalární součin. Vidíme, že jsme ušetřili místo.

Práci s bra-kety si nyní trochu procvičíme.

Příklad 3

Uvažujme funkci $s_n(\phi) = N \sin(n\phi)$, opět na intervalu $(0, 2\pi)$ s obecným n a N normalizační konstantou.

3.1 Vypočítejte normalizační konstantu N .

3.2 Normalizovanou $s_n(\phi)$ vyjádřete jako kombinaci funkcí $f_n(\phi)$.

Jelikož je $s_n(\phi)$ normalizovaná, můžeme ji označit také jako nějaký stav, například $|s_n\rangle$.

3.3 Stav $|s_n\rangle$ vyjádřete jako kombinaci stavů $|n\rangle$.

Ověřte normalizaci $s_n(\phi)$ a $|s_n\rangle$ následujícími způsoby:

3.4 Ověřte normalizaci $s_n(\phi)$ vyjádřenou pomocí funkcí $f_n(\phi)$.

3.5 Ověřte normalizaci $|s_n\rangle$ vyjádřenou pomocí stavů $|n\rangle$.

Příklad 4

Tak jako operátor působí na funkci a výsledkem je funkce, může operátor působit na stav a výsledkem bude obecně kombinace stavů.

4.1 Jaký je výsledek působení operátorů $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{i\phi}$ na (obecný stav) $|n\rangle$. Nejprve vypočteme pomocí vyjádření jako funkce ϕ , tedy $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\phi}$, a potom výsledek přepíšeme do bra-ketového tvaru. Jsou stavy $|n\rangle$ vlastními stavy \hat{A} nebo \hat{B} ?

4.2 Pomocí znalosti $\hat{A}|n\rangle$ a $\hat{B}|n\rangle$ vypočtete výsledek působení komutátoru $[\hat{A}, \hat{B}]$ na stav $|n\rangle$.

∞ Maticová reprezentace

Pokud máme nějakou ON bázi funkcí, můžeme v ní vyjádřit operátory jako matice, stavy nebo funkce potom budou odpovídat vektorům koeficientů.

Matici **O** libovolného operátoru \hat{O} seskládáme z tzv. maticových prvků $o_{nm} = \langle n|\hat{O}|m\rangle$.

Příklad 5

5.1 Vypočtete maticové prvky operátorů $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{i\phi}$ v bázi funkcí $f_n(\phi)$.

S maticemi můžeme dělat podobné výpočty jako s operátory a funkcemi, například můžeme vypočítat komutátor.

5.2 Vypočtete **AB**, **BA** a **[A, B]**. Odpovídá výsledek našim předchozím výpočtům?

Příklad 6

Uvažujme nyní funkci $f_{s1}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(\phi)$.

6.1 Napište vektor **s**₁ rozvoje funkce $f_{s1}(\phi)$ do báze funkcí $f_n(\phi)$.

6.2 Vypočtete **As**₁, je **s**₁ vlastním vektorem **A**? Proč?

6.3 Vypočtete **A**²**s**₁, je **s**₁ vlastním vektorem **A**²? Proč?

∞ Opakování

Pro připomenutí si vypočteme ještě jeden příklad na úpravu výrazu pomocí komutátoru. Víme, že $\frac{\hat{d}}{d\phi}e^{i\phi} = e^{i\phi}(i + \frac{\hat{d}}{d\phi})$.

7.1 Vypočtete akci operátoru $\frac{\hat{d}}{d\phi}e^{2i\phi}$ pomocí testovací funkce a pomocí znalosti komutátoru. Ověřte shodu obou výrazů.