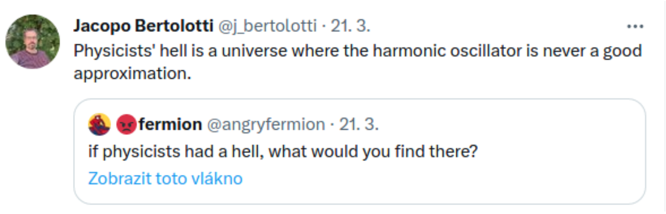
# Cvičení 28. 3. 2023

**Téma: Oscilátor, zvyšovací a snižovací operátory, střední hodnoty**

**Motivace:**




Na přednášce byste měli probírat kvantový oscilátor, systém s potenciálem $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Je to důležitý systém.

$\infty$ Gausovky

Řešení harmonického oscilátoru obsahují gausovské funkce, $e^{-Ax^2}$. Funkce jsou tyto:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\ f_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}} \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\ f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha\sqrt{\pi}}} \left(2\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \end{aligned}$$

Pro některé z dalších výpočtů je vhodné využít následujících vzorečků:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bx^2} dx &= \sqrt{\tfrac{\pi}{B}} & \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Bx^2} dx &= \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{B}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-Bx^2} dx &= \tfrac{3}{4B^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{B}} & \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-Bx^2} dx &= \frac{15}{8B^3}\sqrt{\frac{\pi}{B}} \end{aligned}$$

$\infty$ Zvyšovací a snižovací operátory

Pro systém kvantového oscilátoru existují dva zajímavé a nesmírně užitečné operátory: zvyšovací $\hat{a}^\dagger$ a snižovací $\hat{a}$. Jejich aplikací na vlastní stav kvantového oscilátoru $|n\rangle$, kde $n$ je vlastní číslo stavu, získáme

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \,.$$

**Příklad 1**

**1.1** Vypočtěte, co získáme aplikací operátoru $a^\dagger a$ na stav $|n\rangle$.

Operátoru $a^\dagger a$ také říkáme operátor počtu excitací, důvod by měl být zřejmý z výsledku.

Operátory $a^\dagger$ a $a$ můžeme také vyjádřit pomocí operátorů $x$ a $p$, to bude detailněji na přednášce. Relace jsou tyto

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) \,.$$

Je možné si všimnout, že ve výrazu vystupuje $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, jejím použitím se výrazy zjednodušší.

**1.2** Použijte $x$-reprezentaci operátoru $p$, tedy $-i\hbar\frac{d}{dx}$, identifikujte $\alpha$ a vyjádřete $a$ a $a^\dagger$ pomocí $x$ a $\frac{d}{dx}$.

Získané operátory jsou jednoduše vyjádřením $a$ a $a^\dagger$ v $x$-reprezentaci.

**Příklad 2**

Rovnice $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ funguje i v $x$-reprezentaci, což si nyní ověříme.

**2.1** Vypočtěte první excitovaný stav kvantového oscilátoru aplikací zvyšovacího operátoru na základní stav v $x$-reprezentaci.

**2.2** Jaký by byl výsledek použití snižovacího operátoru na základní stav?

**2.3** Vypočtěte druhý excitovaný stav použitím zvyšovacího operátoru na první excitovaný. Pozor, porovnejte výsledek s vyjádřením $f_2(x)$ na první straně!

**Příklad 3** Práce s $a$ a $a^\dagger$

Kreační a anihilační operátory pro harmonický oscilátor jsou užitečné a hodně se využívají. Typicky v případech, kdy je problém možné převést na oscilátor, případně soustavu oscilátorů. Obdobné operátory se také využívají pro popis mnohoelektronových systémů.

**3.1** Vypočtěte komutátor $[x, p]$.

**3.2** Vypočtěte komutační relaci pro operátory $a$ a $a^\dagger$ s využitím $[x, p] = i\hbar$.

**3.3** Vyjádřete operátory $x$ a $p$ pomocí operátorů $a$ a $a^\dagger$.

**3.4** Vyjádřete operátor $x^2$ pomocí $a$ a $a^\dagger$. Výsledek převeďte do normálního pořadí (anihilační vpravo).

*V normálním pořadí je výraz složený z $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ ve tvaru, kdy anihilační operátory jsou v každém členu vpravo. Tedy například ${a^\dagger}^2 a^3$. Toho docílíme použitím komutační relace na členy obsahující anihilační operátor nalevo od kreačního. Proč je to užitečné? Často potřebujeme vypočítat střední hodnotu operátoru vyjádřeného pomocí $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ pro základní stav. Tedy v normálním pořadí $\langle 0|{a^\dagger}^m a^n|0\rangle$. Jelikož $a|0\rangle = 0$, všechny členy s a vpravo ihned vypadnou a zbydou jen členy s $m = 0$ a $n = 0$, tedy čísla.*

*Pro rychlíky:* **R3.5** Vyjádřete operátor počtu excitací $a^\dagger a$ v $x$-reprezentaci, z výsledku vytkněte $\hbar\omega$, identifikujte Hamiltonián a odvoďte výraz pro Hamiltonián, který obsahuje $a^\dagger a$.

**Příklad 4** Střední hodnoty

Zvyšovací a snižovací operátory nám umožňují vypočítat střední hodnoty operátorů $x$ nebo derivace jednodušejí než pomocí integrace. Nyní si to prověříme.

**4.1** Vypočtěte střední hodnotu $x$ pro základní stav.

**4.2** Vypočtěte střední hodnotu operátoru $x$ pomocí $a$ a $a^\dagger$ a znalosti jejich akce na stavy kvantového oscilátoru.

**4.3** Vypočtěte střední hodnoty operátorů $p$ a $x^2$.

**4.4** Vypočtěte akci operátoru $p^2$ na stav $|n\rangle$. Tedy na stav $|n\rangle$ operátorem $p^2$ zapůsobte. Výsledek obložte zleva stavem $\langle n|$ a dopočtěte střední hodnotu. (Někdy je takovýto postup užitečný, je dobré jej znát.)

**4.5** Ověřte platnost komutačních relací.

**Příklad 5** Maticová reprezentace

Působení operátorů $a$ a $a^\dagger$ je dobře vidět v maticové reprezentaci, kde se ukáže i pár jiných zajímavých věcí pro jiné operátory.

Pro připomenutí, maticovou reprezentaci operátoru $\hat{O}$ vytvoříme z čísel $o_{mn}$ vypočtených takto $o_{mn} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$. Čísla $o_{mn}$ pak uspořádáme do matice $\mathbf{O}$.

**5.1** Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů $a$ a $a^\dagger$ obecně a část pro $n \leq 3$ napište explicitně jako matici. Jsou hermitovské?

S maticemi můžeme ověřit některé z předešlých výpočtů.

**5.2** Ověřte komutační relaci $[a, a^\dagger] = 1$.

**5.3** Vypočtěte matici operátorů $x$ a $p$ a jejích druhých mocnin.

**5.4** Sestrojte matici Hamiltoniánu.