

Domácí úkol 14. 2. 2023

Téma: Relevance kvantové mechaniky a lineární algebry

∞ **Vlnová délka hmoty (deBroglie)** (LS: 21.1.:1)

▷ Vídeňským vědcům se kdysi podařilo změřit difrakci molekul C_{60} , Arndt *et al.*, Nature 401, 680 (1999). Jaká byla vlnová délka molekul, pokud letěly rychlostí 200 m/s?

Uvažujme relativní atomovou hmotnost jednoho atomu uhlíku 12, a hodnotu atomové hmotnostní konstanty $m_u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

∞ **Funkce, operátory a lineární algebra**

Uvažujme nyní funkce $f_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(in\phi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, $n \in Z$.

Nad těmito funkcemi uvažujme operátory $\hat{A} = \frac{\hat{d}}{d\phi}$ a $\hat{B} = e^{i\phi}$.

▷ Pomocí obecné testovací funkce $f(\phi)$ vypočtete $\hat{A}\hat{B}f(\phi)$ a $\hat{B}\hat{A}f(\phi)$. Čemu je rovno působení komutátoru $[\hat{A}, \hat{B}]f(\phi)$ a samotný komutátor $[\hat{A}, \hat{B}]$?

Uvažujme operátor $\hat{A}^2\hat{B}$.

▷ Operátor pusťte na testovací funkci $f(\phi)$ a výsledek vyjádřete ve tvaru $[\dots]f(\phi)$.

▷ Z komutátoru $[\frac{\hat{d}}{d\phi}, e^{i\phi}]$ vyjádřete, čemu je roven součin operátorů $\hat{A}\hat{B}$, tedy $\frac{\hat{d}}{d\phi}e^{i\phi}$.

Výraz použijte k přesunutí operátoru derivace doprava v operátoru $\hat{A}^2\hat{B}$ bez použití testovací funkce. Ověřte shodnost s výsledkem získaným pomocí testovací funkce.

Uvažujme nyní funkce f_n .

▷ Ukažte, že funkce jsou normalizované pro $n = 0$, $n = 1$ a obecně.

Pozn. skalární součin je definován jako $\int_0^{2\pi} f_n^*(\phi)f_m(\phi)d\phi$.

K zamyšlení: Jsou funkce f_n na sebe kolmé? Tedy platí $\int_0^{2\pi} f_n^*(\phi)f_m(\phi)d\phi = 0$ pro $n \neq m$? Stačí se zamyslet, případně integrand nakreslit, a potom se zamyslet.