Příklad 1

Pro začátek vypočtěte komutátor $[x,p]$.

Mějme jednočásticový systém, který je popsán Hamiltoniánem

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2. \tag{1}$$

Pro tento systém je možné zavést nové operátory

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \tag{2}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right). \tag{3}$$

- Vyjádřete operátory x a p pomocí operátorů a a a^+.
- Vypočtěte komutátor $[a, a^+]$.
- Vyjádřete Hamiltonián systému pomocí operátorů a a a^+.

Ověřte, že funkce

$$\psi_0 = \frac{1}{\pi^{1/4}}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\exp(-x^2/(2\alpha^2)), \tag{4}$$

kde $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, je

- normalizovaná (na intervalu $(-\infty, \infty)$).
- vlastní funkcí Hamiltoniánu. Jaké je vlastní číslo?

Dobrovolný bonus:

- Jakou funkci obdržíme po aplikaci operátoru a na stav ψ_0?
- Vypočtěte funkci $\psi_1 = a^+\psi_0$. Funkci normalizujte. Je vlastním stavem Hamiltoniánu?

Příklady 2

Z příkladů 'Simons' na webové stránce (http://quantum.karlov.mff.cuni.cz/~jklimes/UKM/UKM.html) vypočtěte Review Exercises 3, 4, 5 (matice) a Exercise 3 (vlastní funkce).