

Příklad 2.1

(Podle Příkladu 21.8.3 v učebnici.)

Elektron se pohybuje v nekonečně hluboké potenciálové jámě s konstantním potenciálem $V = 0$ na intervalu $x \in (-L/2, L/2)$.

Vlastní stavy v jámě mají tvar

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 3, 5 \dots$$

a

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 2, 4, 6 \dots$$

(Alternativně je možné uvažovat částici pohybující se na intervalu $x \in (0, L)$.)

A) Vypočtěte střední hodnoty Hamiltoniánu $\langle n|H|n \rangle = \langle n|T|n \rangle$ pro jednotlivé stavy (tedy pro n obecné).

B) Vypočtěte maticové elementy Hamiltoniánu mezi stavy n a m , tedy $\langle n|H|m \rangle$. Získaná matice by měla být diagonální, neboť jsme Hamiltonián vyjádřili v bázi vlastních stavů.

C) Částici i s dírou vložíme do vnějšího homogenního elektrického pole. Výsledkem je, že se potenciál změní na $V = Eqx$, kde E je intenzita pole a q náboj elektronu. Co se asi stane s elektronem? Vypočtěte maticové elementy potenciálu, tedy $\langle n|V|m \rangle$. Jsou některé z nich nulové? Proč?

D) Celkový Hamiltonián je roven $H = T + V = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + Eqx$. Jeho maticovou reprezentaci obdržíte jako

$$\langle m|H|n \rangle = \langle m|T + V|n \rangle = \langle m|T|n \rangle + \langle m|V|n \rangle.$$

Matice není diagonální, tudíž původní vlastní stavy nejsou vlastními stavy nového systému. Nové vlastní stavy je obecně možné získat diagonalizací matice Hamiltoniánu. Jelikož je matice nekonečná, tak je třeba uvažovat jen její část. Proveďte diagonalizace části matice, kdy uvažujeme jen stavy $n = 1$ a $n = 2$, tedy 2×2 matice pro stavy s nejnižší energií. Vypočtěte odpovídající (dva) vlastní stavy. Jaká je jejich hustota? Proč?

Dobrovolný bonus: A) Proveďte diagonalizaci pro matici 3×3 , změnila se nejnižší hladina oproti té z 2×2 diagonalizace? Proč?

B) Proveďte diagonalizaci pro co největší matici Hamiltoniánu, jak moc se nejnižší hladina liší oproti té obdržené 2×2 a 3×3 diagonalizací? Závísí tato změna na hodnotě elektrického pole E ?