Příklad 3.1

Uvažujme částici v systému, který má pouze dva vlastní stavy $|p\rangle$ a $|q\rangle$. (Vlnové funkce stavů $|p\rangle$ a $|q\rangle$ bychom mohli napsat explicitně, ale není to nutné.) Stavům přísluší energie ϵ_p a ϵ_q. Hamiltonián $\hat{H}$ systému tudíž můžeme vyjádřit jako matici

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_p & 0 \\ 0 & \epsilon_q \end{pmatrix} .$$

Stav $|p\rangle$ potom odpovídá vektoru $\mathbf{p} = \binom{1}{0}$, stav $|q\rangle$ odpovídá vektoru $\mathbf{q} = \binom{0}{1}$. Nečasovou Schrödingerovu rovnici potom možné použít pomocí maticové reprezentace například takto

$$\hat{H}|p\rangle = \mathbf{Hp} = \begin{pmatrix} \epsilon_p & 0 \\ 0 & \epsilon_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_p \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \epsilon_p |p\rangle ,$$

čímž jsme ověřili, že stav $|p\rangle$ je vlastním stavem $\hat{H}$ s vlastním číslem ϵ_p.

Mějme veličinu A, jíž přísluší operátor $\hat{A}$, jehož vlastní stavy pro daný systém jsou $|A_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle + |q\rangle)$ a $|A_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle - |q\rangle)$. Stavům přísluší vlastní hodnoty a_1 a a_2. V maticové reprezentaci odpovídá operátoru $\hat{A}$ matice

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ a_1 - a_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix} .$$

- Ověřte, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{H}$ spolu nekomutují.
- Ověřte v maticové reprezentaci, že stav $|A_1\rangle$ je vlastním stavem $\hat{A}$.
- Vypočtěte střední hodnotu měření veličiny A, pokud se systém nachází ve stavu $|q\rangle$, tedy $\langle q|A|q\rangle$. (Pomocí maticové reprezentace stačí vypočítat $\mathbf{q}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{q}$, kde $\dagger$ značí transponovaný a komplexně sdružený vektor.)

V čase $t = 0$ jsme pro veličinu A naměřili hodnotu a_1, částice se tudíž octla ve stavu $|A_1\rangle$.

- Pomocí vlastních stavů Hamiltoniánu napište časově závislou vlnovou funkci $\psi(t)$ pro tuto počáteční podmínku.
- Vypočtěte časovou závislost střední hodnoty měření A a energie. Tedy $\langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle$ a $\langle \psi|\hat{H}|\psi\rangle$, kde $|\psi\rangle$ je časově závislé.

Při měření veličiny A naměříme vždy buď hodnotu a_1, nebo hodnotu a_2. Jaké jsou (časově závislé) pravděpodobnosti p_1 a p_2 naměření těchto hodnot? (Platí $\langle A\rangle = \sum_i p_i(t) a_i$.)

Bonus:

Operátor můžeme obecně zapsat pomocí jeho vlastních stavů a hodnot jako

$$\hat{A} = \sum_i a_i |A_i\rangle\langle A_i| .$$

Pro daný systém použijte známého vyjádření stavů $|A_1\rangle$ a $|A_2\rangle$ v bázi stavů $|p\rangle$ a $|q\rangle$ k ověření správnosti maticové reprezentace operátoru $\hat{A}$.