Příklad 5.1

Elektricky nabitá částice o hmotnosti m a náboji e se pohybuje v poli harmonického oscilátoru s potenciálem $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Tomuto odpovídá Hamiltonián

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

Na systém začne působit vnější elektrické pole o intenzitě E. Celkový Hamiltonián nového systému je tedy

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - Eex \,.$$

Tomuto Hamiltoniánu odpovídají nové vlastní stavy a energie.

Najděte vlastní stavy a energie nového systému. Jakou energii má nový základní stav? Změní se energetické rozdíly mezi hladinami? Proč?

Napište matici původního Hamiltoniánu H_0 v bázi jeho vlastních stavů. (Je diagonální a stačí pro cca. 3 stavy s nejnižšími energiemi.)

Napište matici operátoru $V' = -Eex$, použijte přitom vyjádření x pomocí zvyšovacího a snižovacího operátoru.

Energii nového základního stavu známe přesně z předchozího výpočtu. Pokud je problém složitější a není možné provést úpravu Hamiltoniánu na řešitelný problém, energii nových stavů můžeme získat diagonalizací matice nového Hamiltoniánu H'. Jelikož je matice nekonečná, začneme s diagonalizací matice 2×2, v bázi dvou stavů s nejnižší energií Hamiltoniánu H_0. Postupujeme standardním způsobem: Vypočteme determinant matice $H' - \lambda I$, kde I je jednotková matice a vyřešíme kvadratickou rovnici pro kořeny λ_i. Hodnoty λ_i jsou vlastní čísla H', a tudíž nové vlastní energie. Výsledné rovnice pro λ_i by měly obsahovat člen $\sqrt{\hbar^2\omega^2 + \frac{2V^2e^2}{m\hbar\omega^3}}$, vytknutím prvního členu před odmocninu a aproximací $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ výraz upravte. Energie nižší hladiny by se měla shodovat s energií obdrženou úpravou na úplný čtverec. To je trochu překvapivé, neboť při aproximaci odmocniny jsme některé členy zanedbali a přebývají. Přijdete na to, jak bychom se těchto členů zbavili?

Příklad 4.2

Uvažujme částici v harmonickém potenciálu s Hamiltoniánem

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \,.$$

Z blíže nespecifikovaného důvodu dojde ke změně potenciálu, takže poklesne na polovinu původní hodnoty. Tomu odpovídá nový Hamiltonián

$$H' = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{4}m\omega^2 x^2 \,.$$

Jaké jsou energie a stavy Hamiltoniánu H'?

Kromě přesného výpočtu z předchozího bodu je možné energie opět vypočítat přibližně pomocí diagonalizace Hamiloniánu H' v bázi stavů H_0. Opět postačí uvažovat několik stavů s nejnižší energií, v tomto případě 3. V bázi těchto stavů napište matici

Hamiltoniánu H'. Postupovat je možné různě, můžeme například použít $H' = H_0 + V$, kde $V = -\frac{1}{4}m\omega^2 x^2$. Maticovou reprezentaci H_0 máme, to jsou vlastní energie pro tři nejnižší stavy. Pro výpočet matice V můžeme využít zvyšovací a snižovací operátory, případně integraci. Výsledná matice by měla mít tvar

$$H' = \begin{pmatrix} A & 0 & T \\ 0 & B & 0 \\ T & 0 & C \end{pmatrix}.$$

K výpočtu nových vlastních energií potřebujeme opět provést diagonalizaci H'. Naštěstí není třeba diagonalizovat matici 3×3, jelikož první excitovaný stav (s energií B) se nekapluje ani se základním stavem (energie A), ani s druhým excitovaným stavem (energie C). Stačí potom najít vlastní čísla matice 2×2 tvaru

$$\begin{pmatrix} A & T \\ T & C \end{pmatrix}.$$

Provedeme opět standardním postupem. Výsledná energie základního stavu je o trochu nižší než ta, kterou jsme vypočetli analyticky. Proč tomu tak je? Bylo by možné výsledek vylepšit? Dokážete to?

Příklad 4.3

Vlnová funkce základního stavu lineárního harmonického oscilátoru (LHO) má tvar

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}},$$

kde $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. S pomocí zvyšovacího operátoru $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}(x - \alpha^2 \frac{d}{dx})$ vypočtěte první a druhý excitovaný stav.

LHO je ve stavu $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\pi^{1/4}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{x}{\alpha} \right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}$. Jaké jsou koeficienty rozvoje $|\psi\rangle$ do báze vlastních stavů LHO?